SEMINARIO UNIVERSITARIO 2026

FINAL – 13/03/2026

Apellido y Nombre:……………………………………………………………….…………………

Número de documento: …………………………..……………………………………………

TEMA 3

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto
- Todas las respuestas deben estar justificadas

EJERCICIO 1: Se sabe que $\propto$ es una raíz positiva del polinomio $p_{(x)} = 6x^3 - (4 \propto +5)x^2 - (1+\propto)x+\propto$. Determinar si el polinomio $p_{(x)}$ es divisible por el polinomio $q_{(x)} = 6x^2 + x - 1$

EJERCICIO 2: Sea $f\colon \mathbb{R}_0{}^+ \to \mathbb{R}$ una función cuadrática tal que $f_{(1)} = 1$, $f_{(2)} = 7$ y $f_{(3)} = 17$. La función $g\colon \mathbb{R} \to I_g \subseteq \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^{\frac{1}{2}x+1} + 3$. Dar la expresión más simplificada posible de $(f^{-1} \circ g^{-1})_{(x)}$ indicando su dominio.

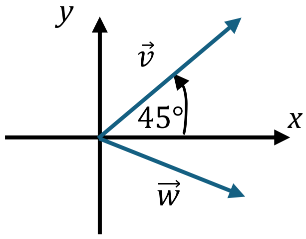
EJERCICIO 3:

(a) Dar el conjunto de números reales que satisfacen la siguiente desigualdad: $\frac{2x-5}{x+3} > \frac{x-4}{x-2}$.

(b) Dar el conjunto solución de $9^{3x} - 8.3^{3x-1} = 1$.

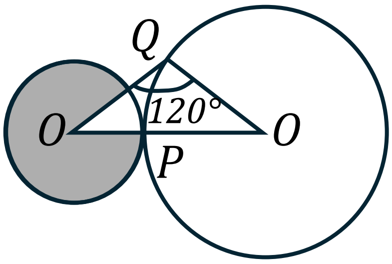
EJERCICIO 4:

(a) Sean los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores graficados y, además, $|\vec{v}| = 5\sqrt{2}$, $\vec{v}$ forma un ángulo de 45° con el semieje positivo de las abscisas y $\vec{v}.\vec{w} = 5$. Sabiendo que el ángulo comprendido entre los vectores es de 60°, calcular las coordenadas de $\vec{w}$



(b) Dar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $log_2(x) + log_4(x) + log_8(x) + \frac{11}{2} = 0$

EJERCICIO 5: Las circunferencias de centro en O y O' del dibujo son tangentes en P, y Q es un punto de la circunferencia de mayor radio. Se sabe que el radio de una de ellas es el doble del radio de la otra y que $\measuredangle O\hat{Q}O' = 120°$. Determinar el área de la región sombreada en función del menor de los radios.



(resuelto por Sylvina)

Seminario Universitario	Final tema 3	HOJA N° 12 FECHA 13-3-26

EJ 1 Se sabe que α es una raíz positiva del polinomio

$$p(x) = 6x^3 - (4\alpha+5)x^2 - (1+\alpha)x + \alpha$$

Determinar si el polinomio $p(x)$ es divisible por el polinomio $q(x) = 6x^2 + x - 1$

$$p(\alpha) = 0 = 6\alpha^3 - (4\alpha+5)\alpha^2 - (1+\alpha)\alpha + \alpha =$$

$$= 6\alpha^3 - 4\alpha^3 - 5\alpha^2 - \cancel{\alpha} - \alpha^2 + \cancel{\alpha} = 2\alpha^3 - 6\alpha^2 = 0$$

$$2\alpha^2(\alpha - 3) = 0 \rightarrow \alpha = 0 \lor \boxed{\alpha = 3}$$

$$p(x) = 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$$

	6	-17	-4	3
3		18	3	-3
	6	1	-1	0
	x^2	x	c	

$\rightarrow p(x) = (x-3)(6x^2 + x - 1)$

$p(x) = (x-3)\, q(x) \leftarrow q(x) = 6x^2 + x + 1$

$$\boxed{q(x) \mid p(x)}$$

EJ 2 Sea $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow I_f \subseteq \mathbb{R}$ una función cuadrática tal que $f(1) = 1$, $f(2) = 7$ y $f(3) = 17$. La función $g: \mathbb{R} \rightarrow I_g \subseteq \mathbb{R}$ / $g(x) = e^{\frac{1}{2}x+1} + 3$

Dar la expresión más simplificada posible de $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ indicando su dominio

g^{-1}: $y = e^{\frac{1}{2}x+1} + 3 \rightarrow y - 3 = e^{\frac{1}{2}x+1}$

$\ln(y-3) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}x+1}\right) = \left(\frac{1}{2}x+1\right) \overbrace{\ln(e)}^{1}$

$\ln(y-3) - 1 = \frac{1}{2}x \rightarrow x = 2\ln(y-3) - 2$

$$\boxed{g^{-1}(x) = 2\ln(y-3) - 2}$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 = a + b + c$

$f(2) = 7 = a2^2 + b2 + c$

$f(3) = 17 = a3^2 + b3 + c$

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 4a+2b+c = 7 \\ 9a+3b+c = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$\rightarrow f(x) = 2x^2 - 1$

f^{-1}: $y = 2x^2 - 1 \rightarrow y + 1 = 2x^2$

$\frac{y+1}{2} = x^2$ $\quad x \geq 0$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ $\qquad$ $g^{-1}(x) = 2\ln(x-3) - 2$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(2\ln(x-3)-2) = \sqrt{\frac{2\ln(x-3)-2+1}{2}}$$

$$\boxed{(f^{-1}\circ g^{-1})(x) = \sqrt{\ln(x-3)-\frac{1}{2}}}$$

Dominio: ① $\ln(x-3)-\frac{1}{2} \geq 0 \rightarrow \ln(x-3) \geq 1/2$

$e^{\ln(x-3)} \geq e^{1/2}$

$x-3 \geq e^{1/2} \rightarrow \boxed{x \geq e^{1/2}+3}$

② $x-3>0 \rightarrow \boxed{x>3}$ $\qquad$ $\boxed{D_{(f^{-1}\circ g^{-1})} = [e^{1/2}+3, +\infty)}$

EJ 3 a) Dar el conj. de números reales que satisfacen la sig. desigualdad

$$\frac{2x-5}{x+3} > \frac{x-4}{x-2}$$

$\boxed{x \neq -3 \wedge x \neq 2}$

$$\frac{2x-5}{x+3} - \frac{x-4}{x-2} > 0$$

$$\frac{(2x-5)(x-2)-(x-4)(x+3)}{(x+3)(x-2)} > 0$$

$$\frac{2x^2-9x+10-x^2+x+12}{x^2+x-6} > 0$$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$

$\boxed{y_v = 6 > 0}$

$$\frac{\boxed{x^2-8x+22}}{\boxed{x^2+x-6}} > 0$$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$

$y_v = -25/4$

$$\Big(\underbrace{x^2-8x+22>0}_{>0\ \forall x} \wedge \underbrace{x^2+x-6>0}_{(x-2)(x+3)}\Big) \vee \Big(\underbrace{x^2-8x+22<0}_{>0\ \forall x} \wedge x^2+x-6<0\Big)$$

$\nexists x / x^2-8x+22<0$

$\emptyset$

$$\boxed{S = (-\infty,-3)\cup(2,+\infty)}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

Seminario Universitario | Final - Tema 3 | HOJA Nº 2/2 | FECHA 13-3-26

EJ 3) b) Dar el conj. solución de $9^{3x} - 8.3^{3x-1} = 1$

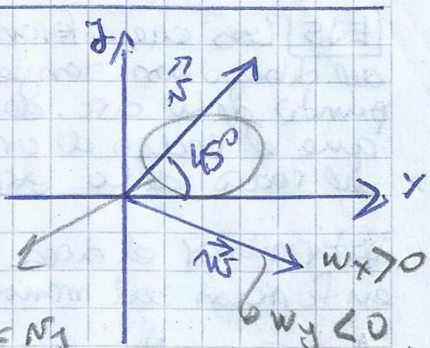
$$(3^2)^{3x} - 8.3^{3x}.3^{-1} = 1$$

$$(3^{3x})^2 - \frac{8.3^{3x}}{3} - 1 = 0$$

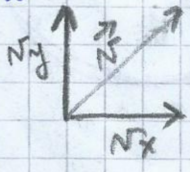
$z = 3^{3x} \longrightarrow z^2 - \frac{8}{3}z - 1 = 0$

$z = 3 = 3^{3x} \rightarrow 3x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$ $\quad 3 = 3^1$ $\qquad \cancel{z = -\frac{1}{3} = 3^{3x}}$ Absurdo

EJ 4) a) Sean $\vec{n}$ y $\vec{w}$ los vectores graficados. Además $|\vec{n}| = 5\sqrt{2}$, $\vec{n}$ forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de abscisas y $\vec{n}.\vec{w} = 5$



Sabiendo que el ángulo comprendido entre los vectores es de 60º. Calcular las coordenadas de $\vec{w}$



$$n_x^2 + n_y^2 = |\vec{n}|^2 \qquad 45º \rightarrow n_x = n_y$$

$$2n_x^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$n_x^2 = n_y^2 = \frac{50}{2} = 25 \rightarrow n_y = n_x = 5 \rightarrow \boxed{\vec{n} = (5,5)}$$

$$\vec{n}.\vec{w} = 5 = (5,5)(w_x, w_y) = 5w_x + 5w_y = 5 \rightarrow \boxed{w_x + w_y = 1} \ (1)$$

$$\underbrace{\cos(60º)}_{1/2} = \frac{\vec{n}.\vec{w}}{\|n\|.\|w\|} = \frac{\cancel{5}\,1}{\cancel{5}\sqrt{2}.\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \rightarrow \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}.1/2}$$

$$w_x^2 + w_y^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \rightarrow \boxed{w_x^2 + w_y^2 = 2} \ (2)$$

$$(1).\ w_x = 1 - w_y \xrightarrow{(2)} (1 - w_y)^2 + w_y^2 = 2$$

$$1 - 2w_y + w_y^2 + w_y^2 = 2$$

$$2w_y^2 - 2w_y - 1 = 0 \longrightarrow \cancel{w_y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{w_y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{w_y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}} \qquad w_x = 1 - \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\vec{w} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

Ej 4) b) Dar el conj. solución de la sig. ecuación:

$$\log_2(x) + \log_4(x) + \log_8(x) + \frac{11}{2} = 0$$

$$\log_2(x) + \frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(8)} + \frac{11}{2} = 0$$

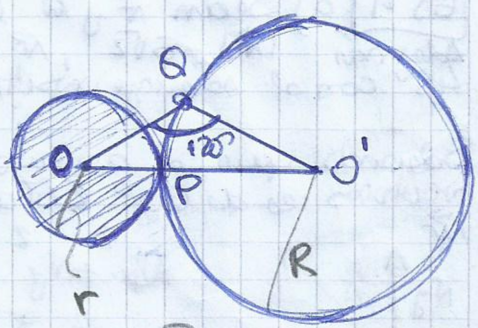
$$\log_2(x) + \frac{\log_2(x)}{2} + \frac{\log_2(x)}{3} + \frac{11}{2} = 0$$

$$\frac{6\log_2(x) + 3\log_2(x) + 2\log_2(x) + 33}{6} = 0$$

$$11\log_2(x) + 33 = 0 \rightarrow \log_2(x) = \frac{-33}{11} = -3$$

$$2^{\log_2(x)} = 2^{-3} \longrightarrow \boxed{x = 1/8}$$

Ej5 Las circunferencias de centro en O y O' del dibujo son tangentes en P y Q es un punto de la circ. de mayor radio. Se sabe que el radio de una de ellas es el doble del radio de la otra y que $\measuredangle O\hat{Q}O' = 120°$

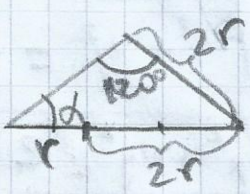


$R = 2r$

Determinar el área de la región sombreada en función del menor de los radios.

$$A = \underbrace{A_{\bullet}}_{\pi r^2} - \underbrace{A_{\triangle}}_{\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}}$$

Hallo α:



$$\frac{\operatorname{sen}(120°)}{3r} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{2r}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(120°) \cdot 2\cancel{r}}{3\cancel{r}} = \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\alpha = 35{,}26°}$$

$$A_S = \pi \cdot r^2 - \frac{\pi r^2\, 35{,}26°}{360°} = \pi r^2 \cdot \left(1 - \frac{35{,}26°}{360°}\right) = \pi r^2\, 0{,}9$$

$$\boxed{A_S = 0{,}9\pi r^2}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)